Capitolul 3 PARTICULARITĂȚILE UTILIZĂRII UNOR LEGI TEORETICE DE DISTRIBUȚIE LA STUDIUL FIABILITĂȚII AUTOVEHICULELOR

3.1 LEGEA EXPONENȚIALĂ

Caracteristica legii: $\boxed{z(t) = \text{const.} = \lambda}$

- Funcția de fiabilitate

$$R(t) = e^{-\int_0^t z(t)dt} = e^{-\int_0^t \lambda\, dt} = e^{-\lambda t}; \quad \boxed{R(t) = e^{-\lambda t}};$$

$t = 0$; $R(t) = 1$;

$t \to \infty$; $R(t) \to 0$.

- Densitatea de probabilitate a timpului de bună funcționare:

$$\boxed{f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}}$$

- Media timpului de bună funcționare

Prin definiție: $m = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt$; dacă $z(t) = \lambda$, atunci $\boxed{m = \lambda \int_0^\infty t \cdot e^{-\lambda t}\,dt}$

.

$$t = u; \quad dt = du;$$
$$e^{-\lambda t}dt = dv; \quad v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$$

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{t}{e^{\lambda t}}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt; \quad \frac{t}{e^{\lambda t}}\bigg|_0^\infty = \frac{\infty}{\infty} - \frac{0}{1}.$$

Pentru înlăturarea nedeterminării se aplică regula lui l' Hôspital:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda t}} = 0. \Rightarrow \frac{t}{e^{\lambda t}}\bigg|_0^\infty = 0.$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda^2}\cdot e^{-\lambda t}\bigg|_0^\infty = -\frac{1}{\lambda^2}(0-1) = \frac{1}{\lambda^2}. \Rightarrow m = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\boxed{m = \frac{1}{\lambda}}$$

- Dispersia timpului de bună funcționare

Prin definiție: $D = \int_0^\infty (t-m)^2 \cdot f(t)\,dt$; $(t-m)^2 = u$; $2(t-m)dt = du$;

$$e^{-\lambda t}dt = dv; \quad -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} = v;$$

. . . ;

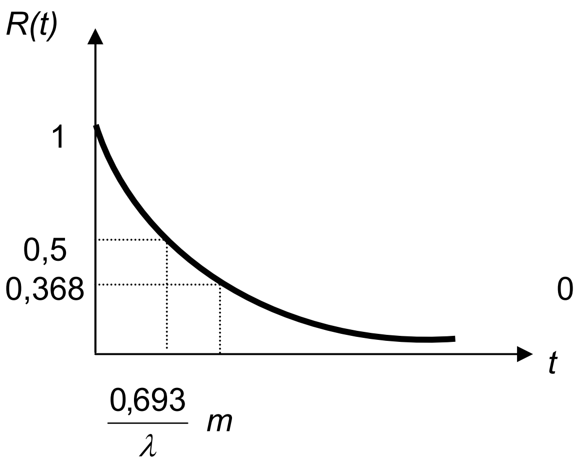
$$t-\frac{1}{\lambda}=u; \qquad dt = du;$$

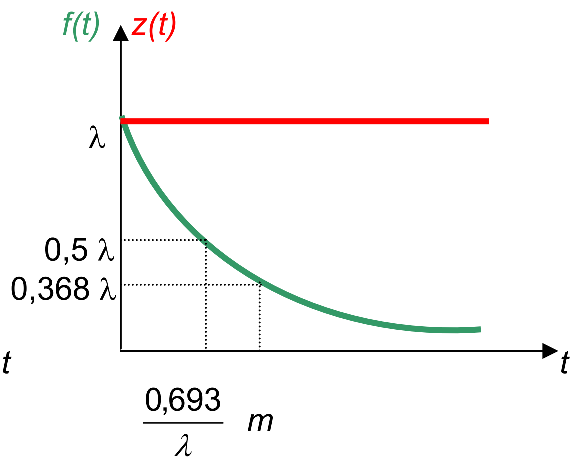
$$e^{-\lambda t}dt = dv; \quad -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}=v;$$

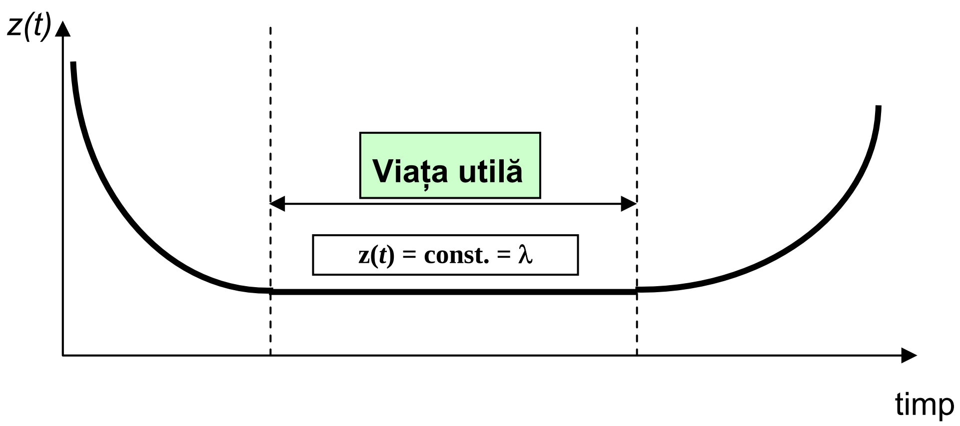
$$\Rightarrow \boxed{D=\frac{1}{\lambda^2}}$$

- Abaterea medie pătratică

$$\boxed{\sigma=\sqrt{D}=\frac{1}{\lambda}=m}$$







OBSERVAȚIE:
Legea exponențială se aplică dispozitivelor aflate în timpul vieții utile.

3.2 LEGEA NORMALĂ (GAUSS – LAPLACE)

Caracteristicile legii:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}};t\in(-\infty,+\infty)}$$

Legea normală descrie probabilistic apariția fenomenelor naturale.

În studiul fiabilității interesează numai intervalul $t\in[0,+\infty)$.
Se introduce coeficientul de normare *c,* astfel încât

$f_{(t)}^{norm}=c\cdot f(t)$. Determinarea lui *c* se face din condiția:

$$\int_0^\infty f_{(t)}^{norm}\,dt=c\cdot\int_0^\infty f(t)\,dt=1.$$

Deci $$c=\frac{1}{\int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt}.$$

Se efectuează înlocuirea de variabilă:

$$\frac{t-m}{\sigma}=y;\qquad \frac{1}{\sigma}dt=dy;\quad t=0;y=-\frac{m}{\sigma};$$
$$t\to\infty;y\to\infty;$$

Deci: $$\Im=\int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt=\int_{-\frac{m}{\sigma}}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy+\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Dar $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\Phi(y)}$$, <u>funcția integrală Laplace</u>.

Se cunoaşte că: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, $\Phi(0)=0$ şi că $\Phi(\infty)=0{,}5$.

Rezultă: $$\Im=0{,}5-\int_0^{-\frac{m}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=0{,}5-\Phi\left(-\frac{m}{\sigma}\right)=0{,}5+\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right).$$

Deci: $$\boxed{c=\frac{1}{0{,}5+\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)}}$$. Dacă $\frac{m}{\sigma}\geq 3$, atunci $\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\approx 0{,}5$ şi deci $c\approx 1$.

Analiza funcției $f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$

- Puncte de maxim

$$\frac{df(t)}{dt}=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2(t-m)}{2\sigma^2}\cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}=-\frac{t-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}=0;$$

$\Rightarrow$ $t = m$, punct de maxim.

$$f(m)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^0=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{0{,}399}{\sigma}.$$ Cu cât $\sigma\uparrow$, cu atât *f(m)* $\downarrow$.

- Puncte de inflexiune

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}-\frac{2\cdot(t-m)^2}{2\sigma^2}\cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{\sigma^2-(t-m)^2}{\sigma^2}=0;$$

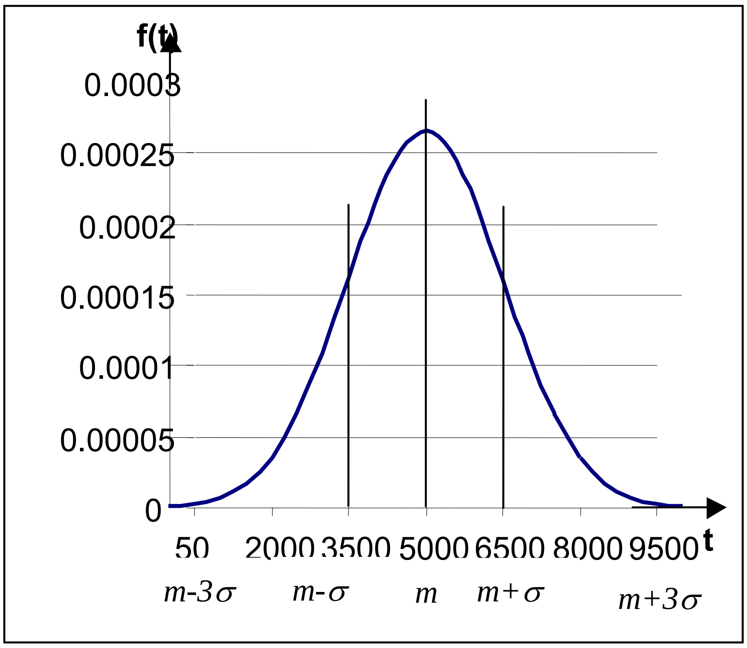
$\Rightarrow$ $t = m\pm\sigma$, puncte de inflexiune.

$$f(m\pm\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{0{,}242}{\sigma}.$$

REGULA CELOR 3 σ Peste 99% din evenimente sunt produse în intervalul [$m-3\sigma$, $m+3\sigma$].

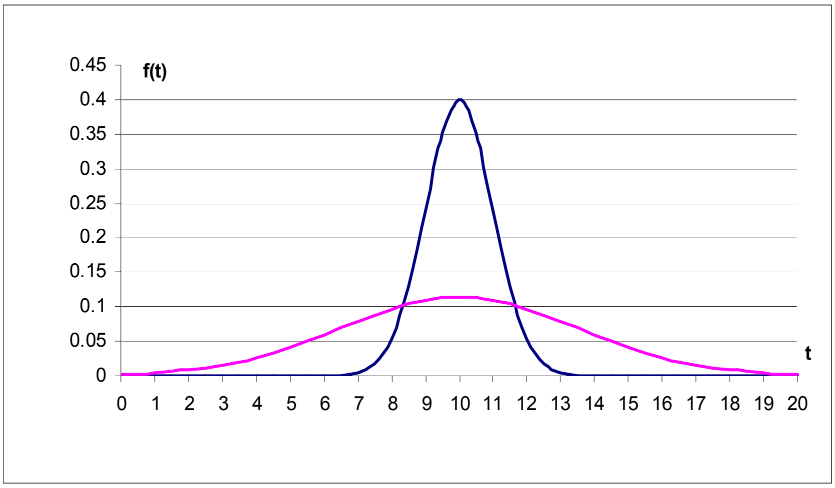
PROPRIETĂȚI

1^0 Curba funcției *f(t)* este simetrică față de $t = m$;
2^0 Valorile funcției *f(t)* sunt pozitive pe tot domeniul de definiție;
3^0 Curba funcției *f(t)* are formă de clopot, cu un maxim la $t = m$ *şi* cu puncte de inflexiune la $t = m\pm\sigma$.



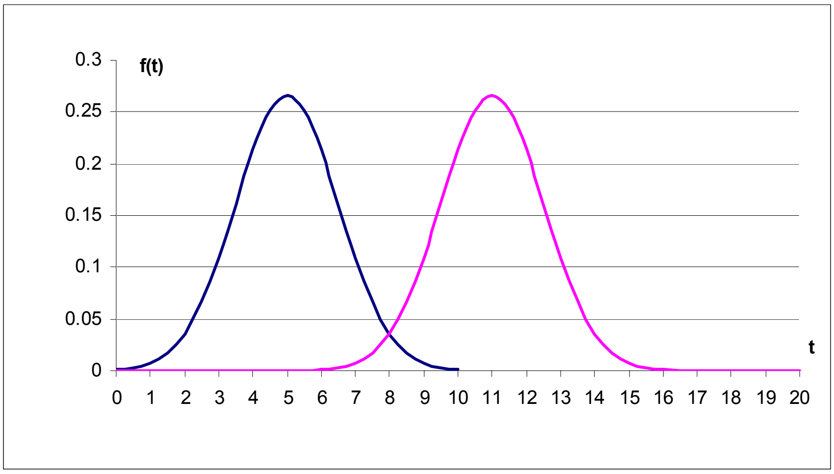
$m_1 = m_2$

$\sigma_1 < \sigma_2$



$m_1 < m_2$

$\sigma_1 = \sigma_2$



- **Funcția de fiabilitate *R(t)***

$$R(t_x) = \int_{t_x}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_x}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t;$$ se face înlocuirea de variabilă:

$$\frac{t-m}{\sigma} = y; \frac{\mathrm{d}t}{\sigma} = \mathrm{d}y;$$

$$t = t_x \Rightarrow y = \frac{t_x - m}{\sigma}; t \to \infty; y \to \infty.$$

$$R(t) = \int_{\frac{t_x-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-0{,}5y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-0{,}5y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{t_x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-0{,}5y^2}\,\mathrm{d}y;$$

$$\Phi(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5y^2}\,dy$$, funcția integrală Laplace.

Rezultă: $$\boxed{R(t)=0,5-\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)}$$

Dacă $c\neq 1$, atunci $$\boxed{R(t)=c\cdot\left[0,5-\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\right]}$$

t = 0; $R(0)=c\cdot\left[0,5-\Phi\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right]=c\cdot\left[0,5+\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\right]$;

dacă $\frac{m}{\sigma}\geq 3\Rightarrow R(0)\cong 1\cdot(0,5+0,5)=1$;

t = m; $R(m)=c\cdot[0,5-\Phi(0)]=c\cdot(0,5-0)=0,5c$;

dacă $\frac{m}{\sigma}\geq 3,\Rightarrow R(m)=0,5$;

t→ ∞; $R(\infty)=c\cdot[0,5-\Phi(\infty)]=c\cdot(0,5-0,5)=0$, $\forall$ *c*.

Deoarece $c=\frac{1}{0,5+\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)}$, iar $\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\leq 0,5$, rezultă $\boxed{c\geq 1}$.

- **Funcția de repartiție**

$$\boxed{F(t)=1-R(t)=1-c\cdot\left[0,5-\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)\right]}.$$

- **Rata de defectare**

$$\boxed{z(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}}{0,5-\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)}}$$

Pentru ***t* =0** $$z(t)=\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(m)^2}{\sigma^2}}}{0,5+\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)}$$

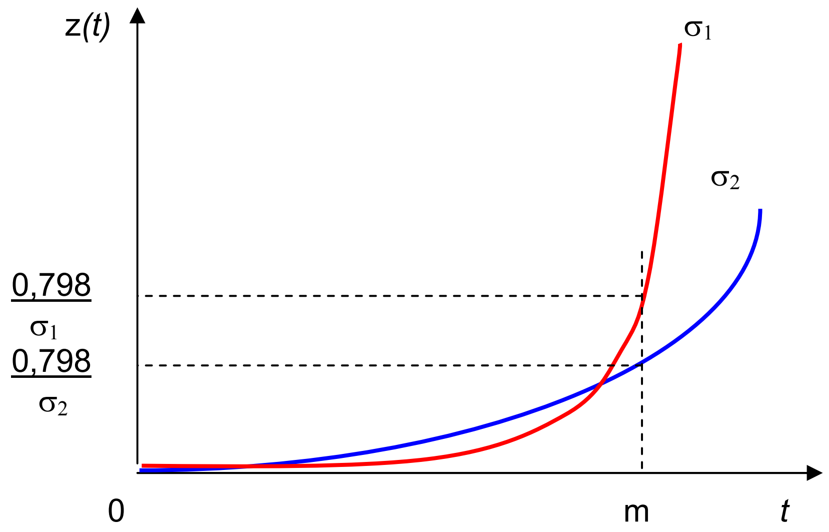
Dacă $\frac{m}{\sigma}\geq 3,\Rightarrow \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)=0,5;\Rightarrow z(0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2}$;

t = m: $z(m)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{0,5-0}=\frac{1}{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{0,798}{\sigma}$;

$t \to \infty$: $\quad z(\infty) = \dfrac{f(\infty)}{R(\infty)} = \dfrac{0}{0}$;

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{df(t)}{dt}}{\frac{dR(t)}{dt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{df(t)}{dt}}{-f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(t-m)\cdot e^{-0,5\cdot\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}}{-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\cdot\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sigma^2}(t-m) = \infty$$

Rezultă: $z(\infty) = \infty$.



OBSERVAȚIE Legea normală se aplică în perioada îmbătrânirii dispozitivelor.

Dispozitive în perioada de îmbătrânire
m = 50 000km; σ = 5 000km;
R(30 000)= ? *z(t)=? Z(70 000)*= **?**

$$\frac{m}{\sigma} = \frac{50000}{5000} = 10 > 3 \Rightarrow c = 1$$

3σ = 3 x 5 000 = 15 000km;
$m - 3\sigma$ = 50 000 – 15 000 = 35 000km;
t = 30 000km< $m - 3\sigma \Rightarrow$ *R(30 000)* = 1.
$m + 3\sigma$ = 50 000 + 15 000 = 65 000km
70 000km > 65 000km $\Rightarrow$ z(70 000) = **0.**

3.3 LEGEA WEIBULL

Caracteristica legii: $$\boxed{R(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta}}},$$

unde:

- α este **parametru de inițializare (localizare)** = momentul în care funcția *R(t)* începe să scadă față de valoarea inițială egală cu unitatea, moment în care probabilitatea de apariție a unei defecțiuni începe să fie diferită de zero;
- η - **parametru de scară** – arată întinderea pe axa timpului a distribuției legii Weibull. Reprezintă momentul la care *R(t)* = 0,368:

  $$\text{pentru } \eta = t - \alpha \Rightarrow R(t) = \mathrm{e}^{-(1)^{\beta}} = \mathrm{e}^{-1} = 0{,}368\,;$$

- β - **parametru de formă** – prin valorile sale schimbă alura curbelor de variație a indicatorilor de fiabilitate, putându-se modela comportarea dispozitivelor în diferite perioade ale vieții dispozitivelor:

  $\beta < 1$ – etapa defecțiunilor timpurii;
  $\beta = 1$ – etapa vieții utile;
  $\beta > 1$ – etapa îmbătrânirii.

- **Densitatea de probabilitate a timpului de bună funcționare**

$$f(t) = -\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta}{\eta}\cdot\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta}}$$

- **Rata de defectare**

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta}\cdot\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

- **MTBF**

$$m = \int_0^{\infty} t\cdot f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t\cdot\frac{\beta}{\eta}\cdot\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Dacă se consideră $\alpha = 0$, rezultă:

$$m = \beta\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}\,\mathrm{d}t\,.$$ Se face schimbarea de variabilă:

$$\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} = x\,; \quad \frac{\beta}{\eta^{\beta}}\cdot t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\,;$$

$$\frac{\beta}{\eta}\cdot\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x; \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\frac{1}{\frac{t}{\eta}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{\beta}}};$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\eta}\cdot\frac{x}{x^{\frac{1}{\beta}}}dt = dx\,; \quad \mathrm{d}t = \frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{x}\mathrm{d}x\,.$$

Limitele de integrare: $t = 0 \Rightarrow x = 0$;
$t \to \infty \Rightarrow x \to \infty$.

Rezultă: $$m = \beta\int_0^\infty x \cdot e^{-x}\,\frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{x}\,\mathrm{d}\,x = \eta\int_0^\infty x^{\frac{1}{\beta}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \eta\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right);$$

Unde $\Gamma(a+n) = (a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\ldots\cdot a\cdot\Gamma(a)$, funcția Euler de tip I sau funcție gama.

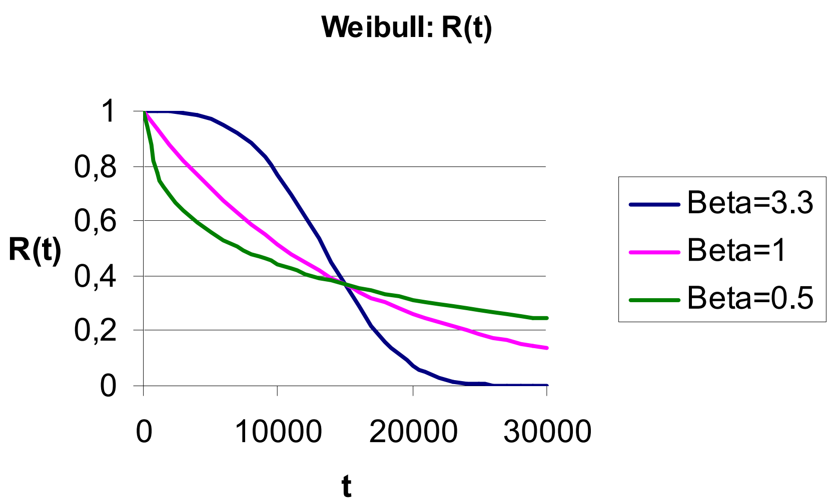
- **Dispersia timpului de bună funcționare**

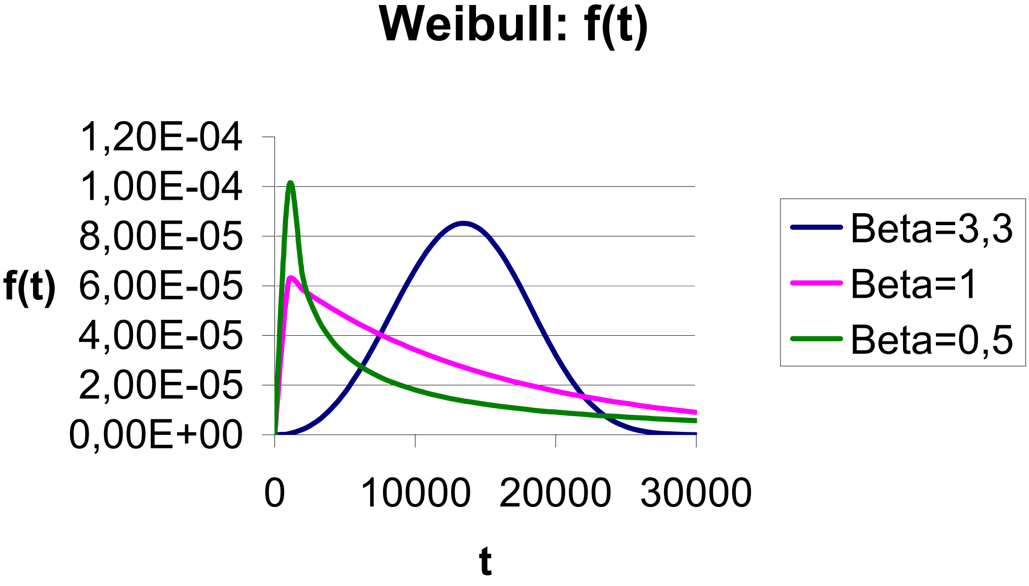
În mod similar, se obține:

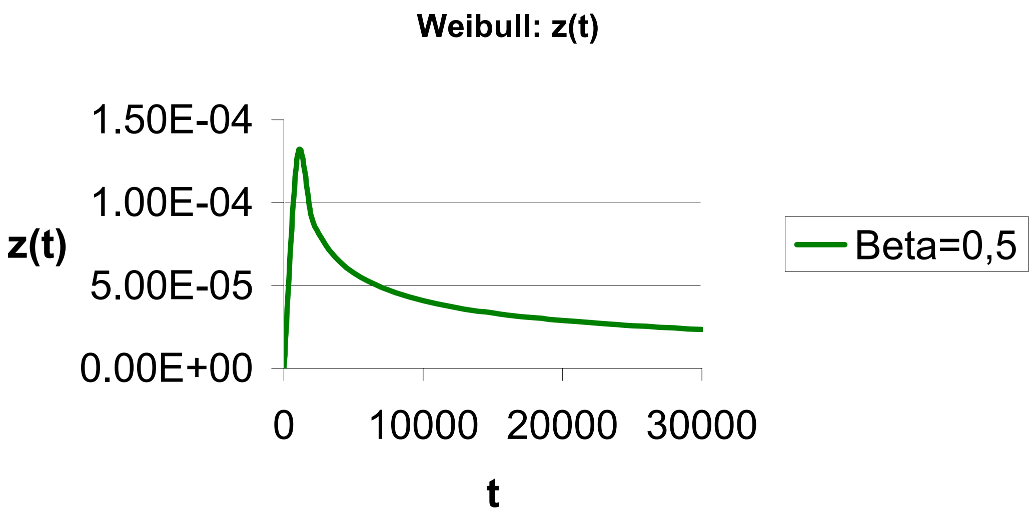
$$D = \eta^2\cdot\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right].$$

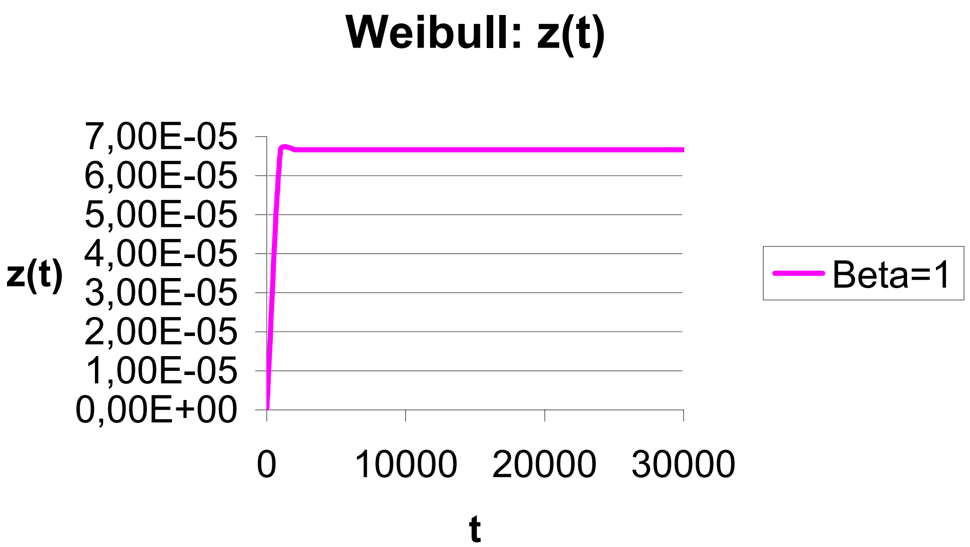
- **Abaterea medie pătratică a timpului de bună funcționare**

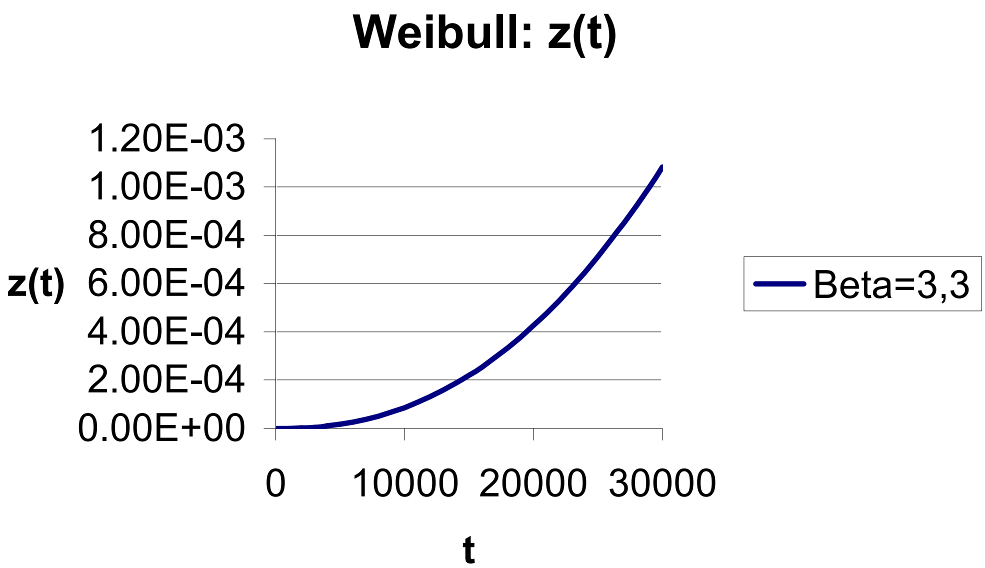
$$\sigma = \sqrt{D}\,.$$

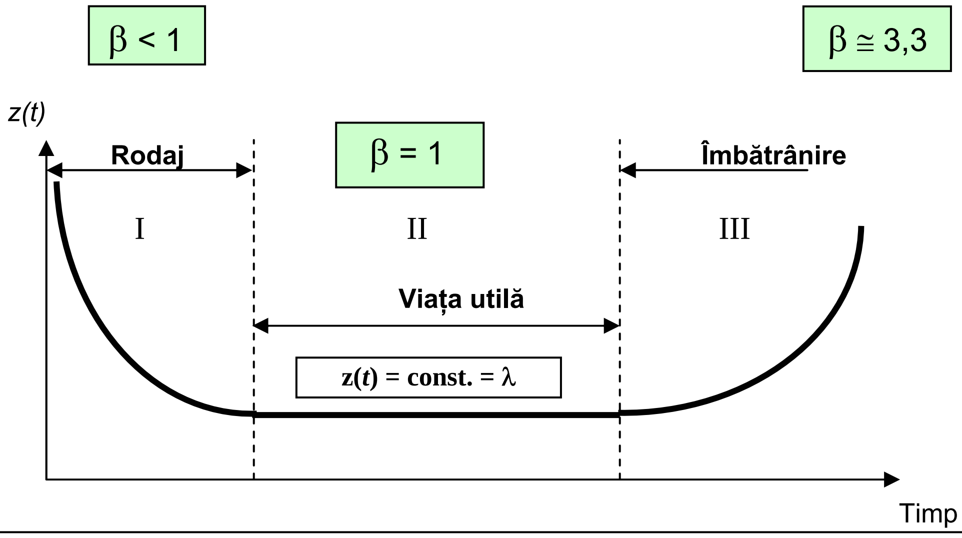





Weibull: z(t)
1.50E-04
1.00E-04
5.00E-05
0.00E+00
z(t)
0
10000
20000
30000
t
Beta=0,5


Weibull: z(t)
7,00E-05
6,00E-05
5,00E-05
4,00E-05
3,00E-05
2,00E-05
1,00E-05
0,00E+00
z(t)
0
10000
20000
30000
t
Beta=1


Weibull: z(t)
1.20E-03
1.00E-03
8.00E-04
6.00E-04
4.00E-04
2.00E-04
0.00E+00
z(t)
0
10000
20000
30000
t
Beta=3,3



OBSERVAȚIE:

Legea Weibull se poate aplica în oricare dintre etapele caracteristice ale vieții unui dispozitiv.

Determinarea parametrilor legii Weibull

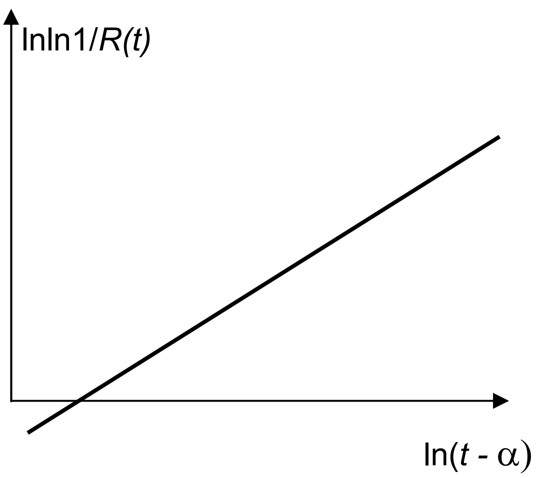
A. Metoda grafică

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta}};\quad \frac{1}{R(t)} = e^{\left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta}};\quad \ln\frac{1}{R(t)} = \left(\frac{t-\alpha}{\eta}\right)^{\beta}$$; rezultă

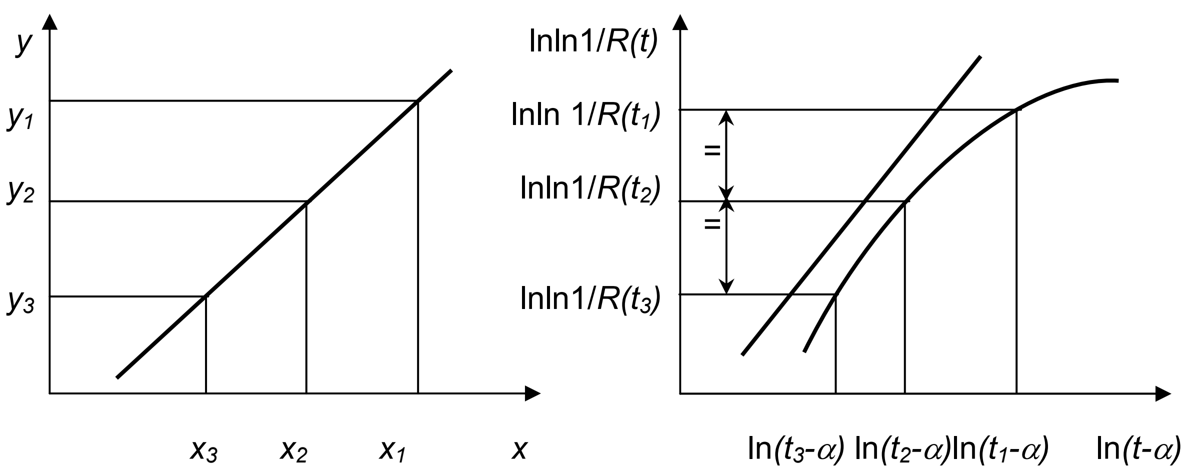
$$\boxed{\ln\ln\frac{1}{R(t)} = \beta\ln(t-\alpha) - \beta\ln\eta};$$

este ecuația unei drepte de forma:

$$\boxed{y = \beta x + c}\qquad \begin{cases} y = \ln\ln\dfrac{1}{R(t)}; \\ x = \ln(t-\alpha); \\ c = -\beta\ln\eta \end{cases}$$



1^0 *Determinarea lui* α



Dacă $y_1 - y_2 = y_2 - y_3$, atunci $x_1 - x_2 = x_2 - x_3$.

- Se aşează în grafic punctele corespunzătoare lui $R(t)$ pentru fiecare defecţiune, dar <u>neluând în seamă pe α</u>. Deoarece s-a neglijat α, punctele nu se vor înscrie pe o dreaptă, ci pe o curbă.
- Se aleg trei puncte egal distanţate pe axa lnln1/$R(t)$. Acestora le vor corespunde trei puncte pe curbă ale căror abscise vor fi: $\ln(t_3-\alpha)$; $\ln(t_2-\alpha)$ şi $\ln(t_1-\alpha)$. Lor li se va impune condiţia echidistanţei:

$\ln(t_1-\alpha) - \ln(t_2 - \alpha) = \ln(t_2-\alpha) - \ln(t_3 - \alpha)$, care poate fi scrisă şi sub forma:

$\frac{t_1-\alpha}{t_2-\alpha} = \frac{t_2-\alpha}{t_3-\alpha}$, de unde rezultă:

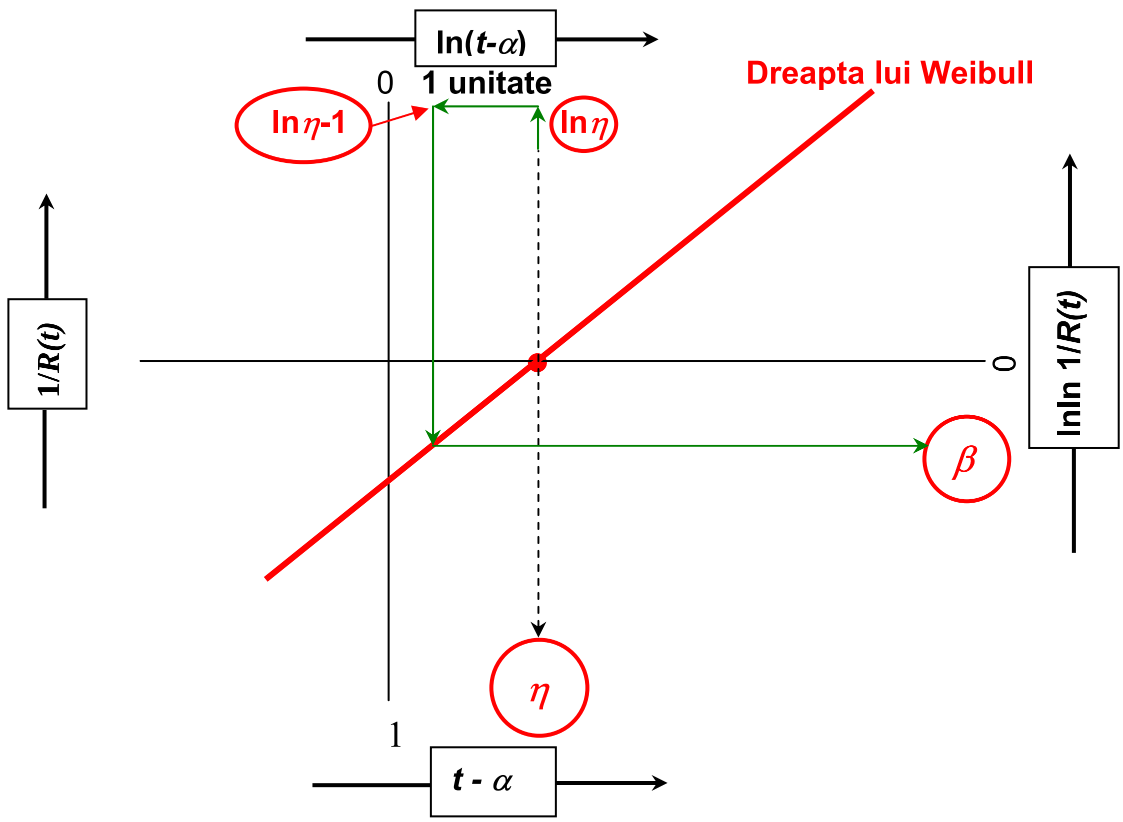
$$\boxed{\alpha = \frac{t_1 \cdot t_3 - t_2^2}{t_1 - 2t_2 + t_3}}$$

.

- Cu valoarea lui α astfel determinată, se aşează în grafic noile puncte care vor avea aceleaşi ordonate, dar abscise mai mici cu α decât punctele amplasate înainte de cunoaşterea lui α. Se obţine dreapta lui Weibull care va fi utilizată în continuare la determinarea celorlalţi parametri ai legii.

2^0 *Determinarea lui η*

Dacă **lnln1/*R(t)* = 0**, atunci **ln (*t* - α) = ln η.**



De la punctul de intersecţie dintre dreapta Weibull şi axa absciselor se coboară o verticală şi se obţine η.

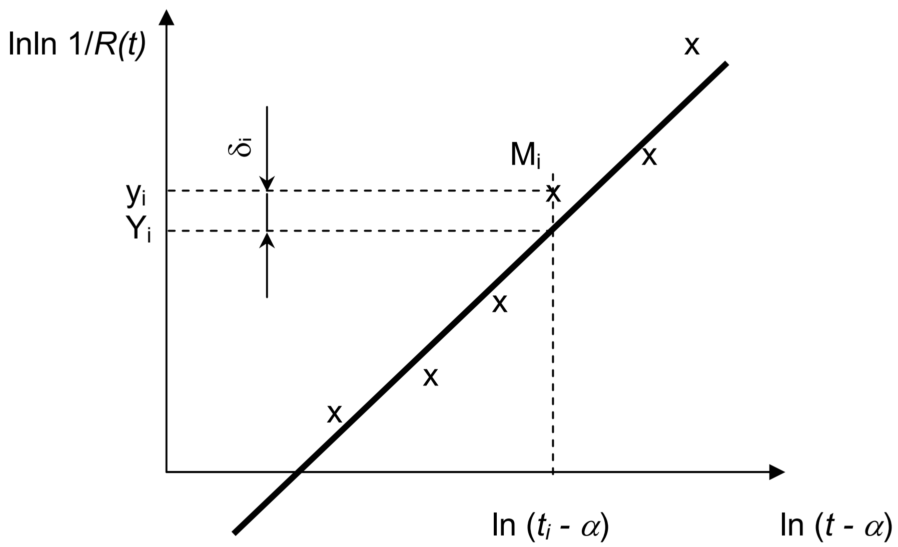
3^0 *Determinarea lui* β

Deoarece $\beta = \dfrac{\ln\ln\dfrac{1}{R(t)}}{\ln(t-\alpha)-\ln\eta}$, în situația în care

ln(t - α) – ln$\eta = 1$, atunci $\boxed{\beta = \ln\ln\dfrac{1}{R(t)}}$

De la punctul de intersecție dintre dreapta Weibull şi axa absciselor se ridică o verticală până la scara ln(t-α). De aici se face lateral un pas egal cu unitatea pe această scară, după care se coboară vertical până la intersecția cu dreapta Weibull, de unde se duce o orizontală până pe scara lnln 1/*R(t)* pe care se citeşte valoarea lui β.

B. Metoda grafo – analitică (a celor mai mici pătrate)



Y_i , lnln1/$R(t) = \beta \ln(t_i - \alpha) - \beta \ln\eta$;
$\delta_i = y_i - Y_i = y_i - \beta \ln(t-\alpha) + \beta \ln\eta$.

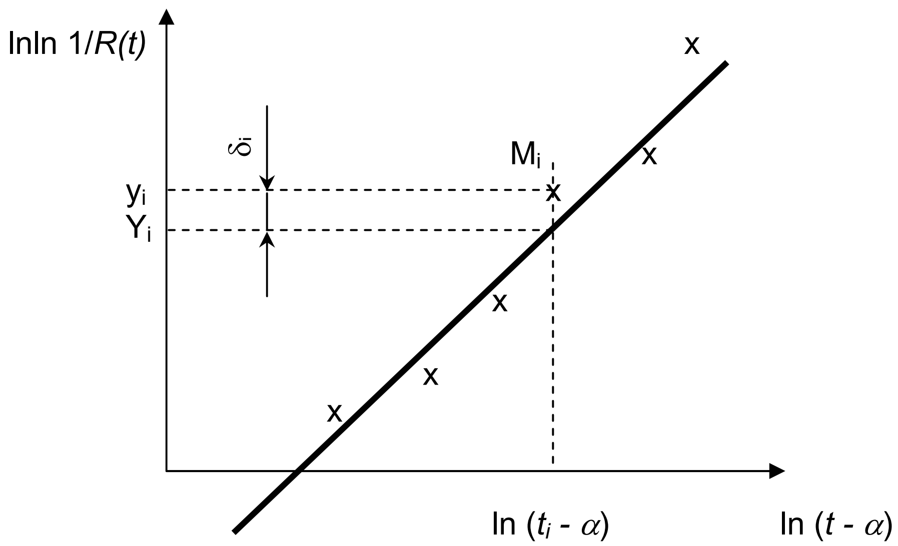
Se defineşte funcția:

$$g(\alpha,\eta,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \beta\ln(t_i-\alpha) + \beta\ln\eta\right]^2 .$$

Se pun condițiile necesare de extrem:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial\alpha} &= 0;\\ \frac{\partial g}{\partial\eta} &= 0;\\ \frac{\partial g}{\partial\beta} &= 0.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha,\ \eta,\ \beta.$$

A. Metoda grafo – analitică



Y_i , lnln1/$R(t)$ = β ln(t_i - α) - β lnη;
$\delta_i = y_i - Y_i = y_i - \beta \ln(t-\alpha) + \beta \ln\eta$.

Se defineşte funcţia:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \beta \ln(t_i - \alpha) + \beta \ln \eta\right]^2 .$$

Se pun condiţiile de maxim:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \alpha} &= 0; \\ \frac{\partial g}{\partial \eta} &= 0; \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha, \eta, \beta.$$

3.4 LEGEA BINOMIALĂ (legea lui Bernoulli)

Caracteristica legii

Probabilitatea de producere, la un moment dat, a ***k*** defecţiuni în cazul unui eşantion format din N_0 dispozitive, cunoscându-se valoarea funcţiei de defectare a unui element, F, este:

$$\boxed{P_{k,N_0} = C_{N_0}^{k} \cdot F^{k} \cdot (1-F)^{N_0-k}}$$

Numărul mediu de defecţiuni: $\boxed{M = N_0 \cdot F}$.

Dispersia şi abaterea medie pătratică ale numărului de defecţiuni:

$$\boxed{\begin{aligned} D &= N_0 \cdot F \cdot (1-F); \\ \sigma &= \sqrt{N_0 \cdot F \cdot (1-F)} \end{aligned}}$$

APLICAȚII NUMERICE

E

Enunț:

Se consideră un eşantion format din 16 schimbătoare de viteză. Să se determine probabilitatea de producere a 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, respectiv 16 defecțiuni, considerând trei cazuri: F = 0,1; F = 0,5; F = 0,8. Pentru cele trei situații se vor calcula de asemenea M, D şi σ şi se vor trasa curbele $P_{k,N_0} = f(k)$.

Rezolvare:

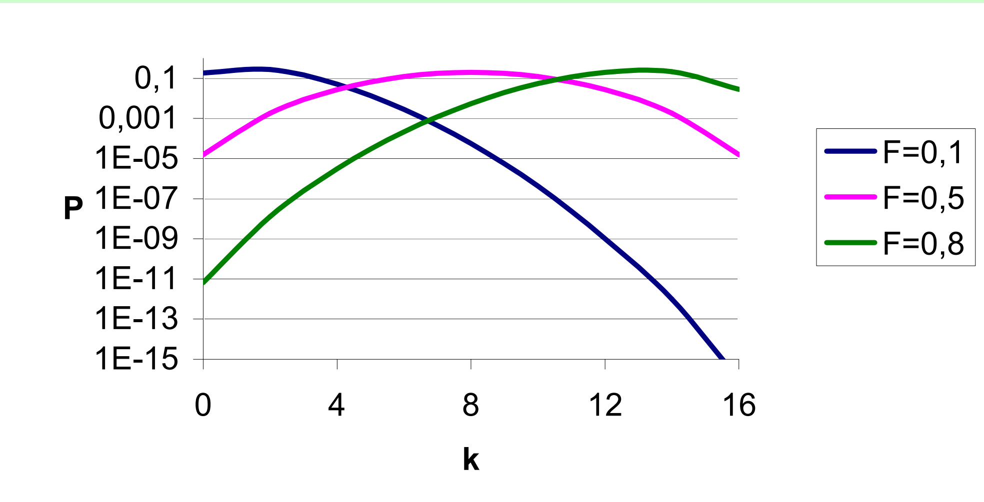
1^0 Se calculează P_{k,N_0} pentru toate cazurile precizate în enunț; se va avea în vedere că: $C_{N_0}^{k} = \frac{N_0!}{k!\cdot(N_0-k)!}$ şi că, atunci când $k > \frac{N_0}{2}$, $C_{N_0}^{k} = C_{N_0}^{N_0-k}$.

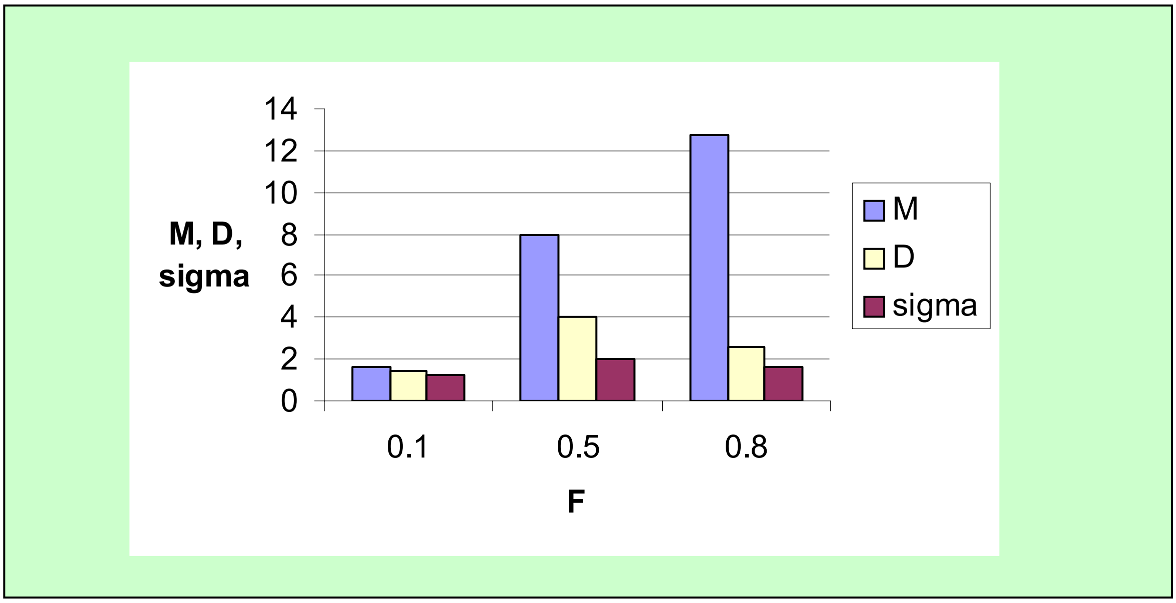
	k	0	2	4	6	8	10	12	14	16
	C_{16}^{k}	1	120	1820	8008	12870	8008	1820	120	1
F=										
0,1	$0,1^{k}$	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-14}	10^{-16}
	$0,9^{16-k}$	0,185	0,229	0,282	0,349	0,430	0,531	0,656	0,810	1
	$P_{16,k}$	0,185	0,275	$5,14\cdot10^{-2}$	$2,79\cdot10^{-3}$	$5,54\cdot10^{-5}$	$4,26\cdot10^{-7}$	10^{-9}	$9,72\cdot10^{-13}$	10^{-16}
F=										
0,5	$0,5^{k}$	1	0,25	$6,25\cdot10^{-2}$	$1,56\cdot10^{-3}$	$3,91\cdot10^{-3}$	$9,77\cdot10^{-4}$	$2,44\cdot10^{-4}$	$6,10\cdot10^{-5}$	$1,53\cdot10^{-5}$
	$0,5^{16-k}$	$1,53\cdot10^{-5}$	$6,10\cdot10^{-5}$	$2,44\cdot10^{-4}$	$9,77\cdot10^{-3}$	$3,91\cdot10^{-3}$	$1,56\cdot10^{-2}$	$6,25\cdot10^{-2}$	0,250	1,00
	$P_{16,k}$	$1,53\cdot10^{-5}$	$1,83\cdot10^{-3}$	$2,78\cdot10^{-2}$	0,122	0,196	0,122	$2,78\cdot10^{-2}$	$1,83\cdot10^{-3}$	$1,53\cdot10^{-5}$
F=										
0,8	$0,8^{k}$	1	0,64	0,410	0,262	0,168	0,107	$6,87\cdot10^{-2}$	$4,40\cdot10^{-2}$	$2,81\cdot10^{-2}$
	$0,1^{16-k}$	$6,55\cdot10^{-12}$	$1,64\cdot10^{-10}$	$4,10\cdot10^{-9}$	$1,02\cdot10^{-7}$	$2,56\cdot10^{-6}$	$6,40\cdot10^{-5}$	$1,60\cdot10^{-3}$	$4,00\cdot10^{-2}$	1,00
	$P_{16,k}$	$6,55\cdot10^{-12}$	$1,26\cdot10^{-8}$	$3,05\cdot10$	$2,15\cdot10^{-4}$	$5,53\cdot10^{-3}$	$5,50\cdot10^{-2}$	0,200	0,211	$2,81\cdot10^{-2}$

2^0 Se calculează valorile *M, D,* şi *σ*:

F	M	D	σ
0,1	1,6	1,44	1,2
0,5	8,0	4,00	2,0
0,8	12,8	2,56	1,6

3^0 Se reprezintă grafic variația lui $P_{16,\,k}$.





3.5 LEGEA LUI POISSON

Caracteristicile legii

- Este un caz limită al repartiției binomiale:
  - eşantioane formate dintr-un **număr mare de dispozitive**;
  - probabilitatea de defectare este redusă (***F*** ≤ **0,1**) cu condiția ca numărul mediu de defecțiuni în diferite şirului de experimente să rămână neschimbat (***N₀·F* = *a* = constant**).
- $$\lim_{N_0 \to \infty} \mathrm{P}_{N_0,k} = \mathrm{P}_{\infty,k} = \frac{a^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-a} = \frac{(N_0 \cdot F)^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-N_0 \cdot F}$$

În cazul înregistrării statistice, numărul mediu de defecțiuni este:

$a = \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{k=0}^{k_{max}} k \cdot n_k$, unde n_k reprezintă numărul de dispozitive care au înregistrat *k* defecțiuni.

Numărul mediu de defecțiuni şi dispersia lui: $M(k) = D^2(k) = a = N_0 \cdot F$;

Funcția de repartiție a numărului de defecțiuni: $F(k) = \sum_{k=0}^{k_{max}} \mathrm{P}_{\infty,k}$.

APLICAȚII NUMERICE

APLICAȚIA I

Enunț:

Să se rezolve problema de la legea binomială aplicând legea lui Poisson. Se vor compara rezultatele obținute prin cele două metode.

Rezolvare:

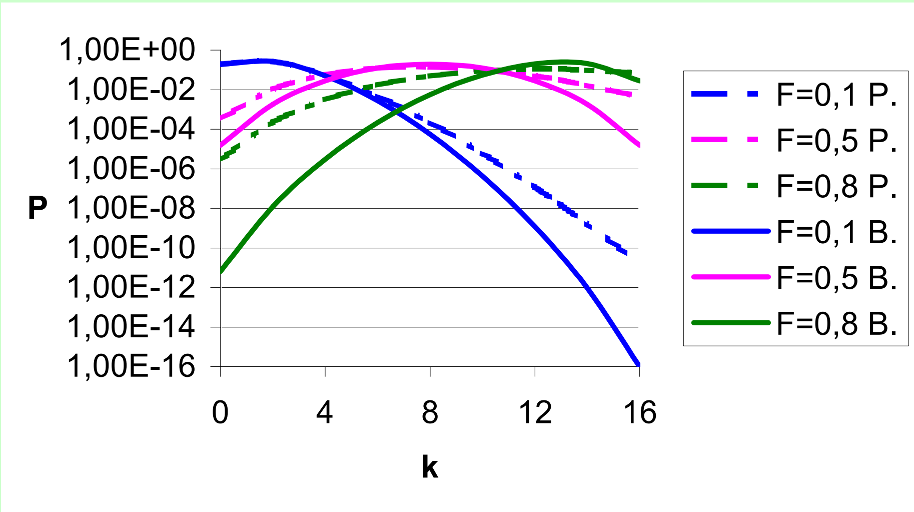
1^0 Se determină numărul mediu de defecţiuni în fiecare din cele trei cazuri studiate:

F	0,1	0,5	0,8
$a = N_0 \cdot F$	1,6	8,0	12,8

2^0 Se calculează $P_{\infty,k} = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}$, rezultatele fiind prezentate tabelar:

	0	2	4	6	8	10	12	14	16
F= 0,1	0.20190	0.25843	0.05513	0.00470	0.00022	6.12E-06	1.19E-07	1.46E-08	1.78E-11
F= 0,5	0.00034	0.01073	0.05725	0.12214	0.13959	0.09926	0.04813	0.02962	0.00451
F= 0,8	2.76E-06	0.00023	0.00309	0.01686	0.04934	0.08982	0.11148	0.10977	0.06851

3^0 Se reprezintă grafic aceste valori, împreună cu cele obţinute prin aplicarea legii binomiale:



4^0 Concluzii:

Rezultatele obţinute prin aplicarea celor două legi sunt apropiate numai în cazul *F* = 0,1 şi pentru un număr de maxim 6 defecţiuni. Se confirmă astfel aspectele teoretice privind aplicabilitatea legii de repartiţie Poisson.

APLICAŢIA II

Enunţ:

Pentru un eşantion format din 150 schimbătoare de viteze au fost înregistrate, de-a lungul a 100 000 km, următoarele numere de defecţiuni:

k	0	1	2	3	4	5	6
n_k	27	53	38	23	8	0	1

Să se determine probabilitatea de producere a 0, 1, 2, 3, ... , 8 defecţiuni, precum şi valorile funcţiei de nefiabilitate pentru aceste 9 situaţii. Se vor trasa graficele de variaţie a acestor două mărimi în funcţie de numărul de defecţiuni.

Rezolvare:

1^0 Se determină numărul mediu al defecţiunilor:

$$a=\frac{1}{150}\sum_{k=0}^{6}k\cdot n_k=\frac{1}{150}\cdot(0\cdot 27+1\cdot 53+2\cdot 38+3\cdot 23+4\cdot 8+5\cdot 0+6\cdot 1)=\frac{236}{150}=1{,}573$$

2^0 Se calculează $P_{\infty,k}$ *şi F(k),* rezultatele fiind prezentate tabelar:

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_k	27	53	38	23	8	0	1	0	0
$P_{\infty,k}$	0,20735	0,32624	0,25664	0,13459	0,05294	0,01666	0,00437	0,00098	0,00019
F(k)	0,20735	0,53359	0,79023	0,92482	0,97776	0,99442	0,99879	0,99977	1,0000

Observaţie: Calculele au fost dezvoltate până la atingerea valorii *F(k)* = 1, din care motiv au fost luate în consideraţie şi cazurile *k* = 7 şi *k* = 8.

3^0 Se reprezintă grafic $P_{\infty,\,k}$ şi *F(k)*: